Espacios Vectoriales (Resumen)

Índice

1. Concepto de espacio vectorial

Definición. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $\mathscr{V}$ un conjunto no vacio. Se dice que $(\mathscr{V}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, o un $\mathbb{K}$-espacio vectorial (se abrevia como $\mathbb{K}$-e.v.) si se verifica que:

1. $(\mathscr{V}, +)$ es un grupo abeliano (véase `Resumen` sobre Estructuras Algebraicas). Es decir,

   $+ : \mathscr{V} \times \mathscr{V} \to \mathscr{V}$ es una aplicación (es decir, $+$ es una operación interna en $\mathscr{V}$) tal que

   a) $\forall u, v, w \in \mathscr{V}$ se cumple que $(u + v) + w = u + (v + w)$.
   b) $\exists e \in \mathscr{V}$ tal que $\forall u \in \mathscr{V}$ se cumple que $u + e = e + u = u$. Al vector e se le llama vector cero y se representa por $\overline{0}$.
   c) $\forall u \in \mathscr{V}$ $\exists v \in \mathscr{V}$ tal que $u + v = v + u = \overline{0}$. Al vector v se le llama vector inverso de u y se representa por $-u$.
   d) $\forall u, v \in \mathscr{V}$ se cumple que $u + v = v + u$.

2. $\cdot : \mathbb{K} \times \mathscr{V} \to \mathscr{V}$ es una aplicación (es decir, $\cdot$ es una operación externa en $\mathscr{V}$) tal que

   a) $\forall u, v \in \mathscr{V}$ y $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ se cumple que $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$.
   b) $\forall u \in \mathscr{V}$ y $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ se cumple que $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$.
   c) $\forall u \in \mathscr{V}$ y $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ se cumple que $(\lambda \cdot \mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u)$.
   d) $\forall u \in \mathscr{V}$ se cumple que $1 \cdot u = u$.

Observación. A los elementos de $\mathscr{V}$ se les llama vectores y a los elementos de $\mathbb{K}$ escalares.

Observación. En un $\mathbb{K}$-espacio vectorial se verifica que

1. $0 \cdot u = \overline{0}$,
2. $\lambda \cdot \overline{0} = \overline{0}$,
3. $\lambda \cdot (-v) = (-\lambda \cdot v) = -(\lambda \cdot v)$

2. Espacios Vectoriales Prototipo

Los siguientes ejemplos de espacios vectoriales son fundamentales en el desarrollo de la asignatura.

1. Sea $\boxed{\mathscr{V} = \mathbb{K}^n}$, con $\mathbb{K}$ cuerpo. Se consideran la operación interna

$$\begin{array}{rcl} + : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^n \\ ((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) & \mapsto & (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \end{array}$$

   y la operación externa

$$\begin{array}{rcl} \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^n \\ (\lambda, (x_1, \ldots, x_n)) & \mapsto & \lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \ldots, \lambda \cdot x_n). \end{array}$$

   Entonces $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ es un $\mathbb{K}$-e.v.

2. Sea $\boxed{\mathscr{V} = \mathscr{M}_{m \times n}(\mathbb{K})}$ el conjunto de todas las matrices $m \times n$ con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces, $(\mathscr{M}_{m \times n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ es un $\mathbb{K}$-e.v., siendo $+$ la suma usual de matrices y $\cdot$ el producto usual de elementos de $\mathbb{K}$ por matrices.

3. Sea $\boxed{\mathscr{V} = \mathbb{K}_n[t]}$ el conjunto de todos los polinomios univariados, en la variable t, con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{K}$ y cuyo grado es menor o igual que n. Entonces, $(\mathbb{K}_n[t], +, \cdot)$ es un $\mathbb{K}$-e.v., siendo $+$ la suma usual de polinomios y $\cdot$ el producto usual de elementos de $\mathbb{K}$ por polinomios.

4. Sea $\boxed{\mathscr{V} = \mathbb{K}[t]}$ el conjunto de todos los polinomios univariados, en la variable t y con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces, $(\mathbb{K}[t], +, \cdot)$ es un $\mathbb{K}$-e.v., siendo $+$ y $\cdot$ como en (3).

5. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo de $\mathbb{R}$ (que eventualmente podría ser $\mathbb{R}$) y sea $\boxed{\mathscr{V} = \mathscr{F}(I, \mathbb{R})}$ el conjunto de todas las funciones de I en $\mathbb{R}$. Entonces, $(\mathscr{F}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$ es un $\mathbb{R}$-e.v., siendo $+$ la suma usual de funciones y $\cdot$ el producto usual de constantes por funciones.

6. [Espacio Vectorial Producto] Sean $(\mathscr{V}_i, +_i, \cdot_i)$, $i = 1, \ldots, n$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$. Se considera el conjunto $\mathscr{V} = \mathscr{V}_1 \times \cdots \times \mathscr{V}_n$ así como la operación interna

$$\begin{array}{rlcl} + : & \mathscr{V} \times \mathscr{V} & \to & \mathscr{V} \\ & ((u_1, \ldots, u_n), (v_1, \ldots, v_n)) & \mapsto & (u_1, \ldots, u_n) + (v_1, \ldots, v_n) = (u_1 +_1 v_1, \ldots, u_n +_n v_n) \end{array}$$

   y la operación externa

$$\begin{array}{rlcl} \cdot : & \mathbb{K} \times \mathscr{V} & \to & \mathscr{V} \\ & (\lambda, (u_1, \ldots, u_n)) & \mapsto & \lambda \cdot (u_1, \ldots, u_n) = (\lambda \cdot_1 u_1, \ldots, \lambda \cdot_n u_n). \end{array}$$

   $(\mathscr{V}, +, \cdot)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial que denominamos <u>espacio vectorial producto</u>.

3. Subespacio vectorial

<u>En todo lo que resta de resumen,</u> se asume que $(\mathscr{V}, +, \cdot)$ es un $\mathbb{K}$-e.v.

<u>**Definición.**</u> Sea $\mathscr{W} \subset \mathscr{V}$ un conjunto no vacio. Se dice que $\mathscr{W}$ es un <u>subespacio vectorial</u> (se abrevia como s.v.) de $\mathscr{V}$ si $(\mathscr{W}, +, \cdot)$ es un $\mathbb{K}$-e.v.

<u>**Teorema.**</u> (Teorema de Caracterización)
Sea $\mathscr{W} \subset \mathscr{V}, \mathscr{W} \neq \emptyset$. Se verifica que

$$\mathscr{W} \text{ es un s.v. de } \mathscr{V} \iff \left\{ \begin{array}{l} (1)\ \forall\, u, v \in \mathscr{W} \text{ se cumple que } u + v \in \mathscr{W} \\ (2)\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K} \text{ y } \forall\, u \in \mathscr{W} \text{ se cumple que } \lambda \cdot u \in \mathscr{W} \end{array} \right.$$

Observación.

1. $\{\overline{0}\}$ y $\mathscr{V}$ son siempre s.v. de $\mathscr{V}$.
2. $\mathscr{W}$ es s.v. de $\mathscr{V} \Rightarrow \overline{0} \in \mathscr{W}$.
3. $\overline{0} \in \mathscr{W} \not\Rightarrow \mathscr{W}$ es un s.v. de $\mathscr{V}$.

Definición. Sean $A, B \subset \mathscr{V}$ se define el conjunto suma como $A + B = \{u_1 + u_2 \,|\, u_1 \in A,\ u_2 \in B\}$

Proposición. Sean $\mathscr{W}_1, \mathscr{W}_2$ s.v. de $\mathscr{V}$. Se verifica que

1. $\mathscr{W}_1 \cap \mathscr{W}_2$ es un s.v. de $\mathscr{V}$.
2. En general, $\mathscr{W}_1 \cup \mathscr{W}_2$ no es un s.v. de $\mathscr{V}$.
3. $\mathscr{W}_1 + \mathscr{W}_2$ es un s.v. de $\mathscr{V}$.

Definición. Sean $\mathscr{W}_1, \mathscr{W}_2$ s.v. de $\mathscr{V}$. Si $\mathscr{W}_1 \cap \mathscr{W}_2 = \{\overline{0}\}$, se dice que la suma $\mathscr{W}_1 + \mathscr{W}_2$ es directa y se escribe $\mathscr{W}_1 \oplus \mathscr{W}_2$.

4. La clausura lineal

Definición. Una combinación lineal en $\mathscr{V}$ es una expresión del tipo $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_s u_s$, donde $\lambda_i \in \mathbb{K}$ y $u_i \in \mathscr{V}$

Definición. Sea $A \subset \mathscr{V}$ un conjunto no vacio. Se define la clausura lineal de A como el conjunto de todas las combinaciones lineales que se pueden formar con los vectores de A y se representa como $L(A)$.

Proposición. Sea $A \subset \mathscr{V}$ un conjunto no vacio. Se verifica que

1. $A \subset L(A)$
2. Si $A \subset B$ entonces $L(A) \subset L(B)$.
3. $L(A)$ es un s.v. de $\mathscr{V}$
4. $L(A)$ es el s.v. de $\mathscr{V}$ mas pequeño que contiene a A; es decir, si $\mathscr{W}$ es un s.v. de $\mathscr{V}$ y $A \subset \mathscr{W}$ entonces $L(A) \subset \mathscr{W}$.
5. Si A es un s.v. de $\mathscr{V}$ entonces $L(A) = A$.
6. $L(L(A)) = L(A)$

Observación. Por convenio, se define $L(\emptyset) = \{\overline{0}\}$.

Teorema. Sean $\mathscr{W}_1, \mathscr{W}_2$ s.v. de $\mathscr{V}$. Entonces $\mathscr{W}_1 + \mathscr{W}_2 = L(\mathscr{W}_1 \cup \mathscr{W}_2)$.

5. Base de un espacio vectorial

Definición. Sea $\mathscr{W}$ un s.v. de $\mathscr{V}$. Se dice que $G \subset \mathscr{W}$ es un sistema generador de $\mathscr{W}$ si $L(G) = \mathscr{W}$.

Definición. Sean $u_1, \ldots, u_r \in \mathscr{V}$. Se dice que

1. $\{u_1, \ldots, u_r\}$ son linealmente independiente (se abrevia como l.i.) si la igualdad
$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r = \overline{0},$$
con $\lambda_i \in \mathbb{K}$, es sólo cierta si $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$.

2. $\{u_1, \ldots, u_r\}$ son linealmente dependientes (se abrevia como l.d.) si existen escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$, no todos nulos, tal que
$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r = \overline{0}.$$

3. $u \in \mathscr{V}$ depende linealmentes de $\{u_1, \ldots, u_r\}$ (se abrevia como d.l.) si existen escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ tales que $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r = u$. Es decir, u d.l. de $\{u_1, \ldots, u_r\} \Leftrightarrow u \in L(\{u_1, \ldots, u_r\})$.

Definición. Sea $\mathscr{W}$ un s.v. de $\mathscr{V}$ y $\mathscr{B} = \{u_1, \ldots, u_r\} \subset \mathscr{W}$. Se dice que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathscr{W}$ si $\mathscr{B}$ es l.i. y es sistema generador de $\mathscr{W}$.

Definición. Sea $\mathscr{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de un $\mathbb{K}$-e.v. $\mathscr{V}$. $\forall u \in \mathscr{V}, \exists ! \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tal que
$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n.$$
A $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ se le llama coordenadas de u respecto a $\mathscr{B}$.

Observación. En la definición de base se ha asumido implícitamente que el conjunto de vectores es finito. El concepto se puede extender al caso infinito, pero en esta asignatura no se profundiza en ese aspecto.

Observación. (Bases canónicas) Consultar Hoja 2 de Problemas.

6. Espacios vectoriales de tipo finito

Definición. Se dice que un espacio vectorial es de tipo finito si posee un sistema generador con una cantidad finita de vectores. En caso contrario, se dice que el espacio vectorial es de tipo infinito.

Observación. (Clasificación de los e.v. prototipo)

1. $\mathbb{K}^n, \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), \mathbb{K}_n[t]$ son de tipo finito.
2. $\mathbb{K}[t], \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ son de tipo infinito.
3. El tipo del espacio vectorial producto depende del tipo de sus factores.

Teorema. (Exitencia de bases)
En todo espacio vectorial, no nulo, de tipo finito existen bases.

Teorema. (Teorema de la base)
En un espacio vectorial de tipo finito $\mathscr{V}$ todas sus bases tienen el mismo cardinal. A este número se le llama dimensión de $\mathscr{V}$ y se representa como $\dim(\mathscr{V})$.

Observación. Por convenio, $\dim(\{\overline{0}\}) = 0$.

Observación.

1. $\dim(\mathbb{K}^n) = n$,
2. $\dim(\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K})) = m\, n$,
3. $\dim(\mathbb{K}_n[t]) = n + 1$.
4. Si $\mathscr{V}_i$ es de tipo finito para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$ entonces
$$\dim(\mathscr{V}_1 \times \cdots \times \mathscr{V}_r) = \dim(\mathscr{V}_1) + \cdots + \dim(\mathscr{V}_r).$$

Proposición. Sea $\mathscr{V}$ un e.v. de tipo finito y $\mathscr{W}$ un s.v. de $\mathscr{V}$. Se verifica que

1. $\dim(\mathscr{W}) \leq \dim(\mathscr{V})$.
2. $\mathscr{W} = \mathscr{V}$ si y sólo si $\dim(\mathscr{W}) = \dim(\mathscr{V})$.
3. Si $\dim(\mathscr{W}) = r$ y $\{u_1, \ldots, u_r\} \subset \mathscr{W}$, entonces $\{u_1, \ldots, u_r\}$ es base de $\mathscr{W}$ si y sólo si $\{u_1, \ldots, u_r\}$ son l.i.
4. Si $\mathscr{W}_1, \mathscr{W}_2$ son s.v. de $\mathscr{V}$ se cumple que

$$\dim(\mathscr{W}_1 + \mathscr{W}_2) = \dim(\mathscr{W}_1) + \dim(\mathscr{W}_2) - \dim(\mathscr{W}_1 \cap \mathscr{W}_2)$$

7. Métodos de Resolución

En todo lo que sigue, $\mathscr{V}$ es un $\mathbb{K}$-e.v. Además, salvo en el Método 4 en el que $\mathscr{V} = \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$, se asume que $\dim(\mathscr{V}) = n$.

Método 1 ¿Cómo calcular coordenadas?

Dada una base $\mathscr{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de $\mathscr{V}$ y $u \in \mathscr{V}$, calcular las coordenadas de u respecto a $\mathscr{B}$.

1. Se plantea la ecuación vectorial ($u_1, \ldots, u_n, u$ son datos y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son incógnitas)

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = u.$$

2. De la ecuación vectorial se deduce un sistema de ecuaciones lineales, en las incógnitas $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, que es compatible determinado.
3. La solución del sistema lineal son las coordendas buscadas.

Método 2 ¿Cómo obtener el vector a partir de las coordenadas?

Dada una base $\mathscr{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de $\mathscr{V}$ y las coordenadas $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de $u \in \mathscr{V}$ respecto a $\mathscr{B}$, obtener u. Basta tener en cuenta la definición de coordenadas:

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n.$$

Método 3 ¿Cómo decidir la independencia lineal (caso finito dimensional)?

Dados $\{v_1, \ldots, v_m\} \subset \mathscr{V}$, con $m \leq n$ (obsérvese que si $m > n$ entonces son, necesariamente, linealmente dependientes), decidir si son l.i.

1. Se fija una base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{V}$; en la práctica se toma $\mathscr{B}$, si es posible, como la base canónica.
2. Se construye una matriz como sigue (aplicar Método 1 para la obtención de cada fila)

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{\text{coordenadas de } v_1 \text{ en } \mathscr{B}} \\ \boxed{\text{coordenadas de } v_2 \text{ en } \mathscr{B}} \\ \vdots \\ \boxed{\text{coordenadas de } v_m \text{ en } \mathscr{B}} \end{pmatrix}$$

3. Sea T la triangulación de M (véase `Resumen` sobre análisis matricial). Si alguna fila de T es nula, entonces $\{v_1, \ldots, v_m\}$ son l.d., en caso contrario son l.i..

$\boxed{\textbf{Método } 4}$ ¿Cómo decidir la independencia lineal (caso $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$)?

Sea I un intervalo en $\mathbb{R}$ (eventualmente, I podría ser $\mathbb{R}$) y $\mathscr{V} = \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$. Se quiere analizar si $\{f_1, \ldots, f_k\} \subset \mathscr{V}$ son l.i. En primer lugar, se observa que la independencia lineal de funciones puede depender del intervalo I (véase ejemplo en pizarra).

Definición. Sean $\{f_1, \ldots, f_k\} \subset \mathscr{V}$ funciones derivables hasta orden, al menos, $k-1$ en I. Se define el Wronskiano de $\{f_1, \ldots, f_k\}$ como el determinante

$$W_{\{f_1,\ldots,f_k\}}(x) = \det \begin{pmatrix} f_1 & \cdots & f_k \\ f_1' & \cdots & f_k' \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{k-1)} & \cdots & f_k^{k-1)} \end{pmatrix}.$$

Teorema. Sean $\{f_1, \ldots, f_k\} \subset \mathscr{V}$ funciones derivables hasta orden, al menos, $k-1$ en I. Si $\{f_1, \ldots, f_k\}$ son l.d. en I, entonces $W_{\{f_1,\ldots,f_k\}}(x) = 0$ en $\forall x \in I$.

Observación. La condición anterior es necesaria pero no suficiente (véase Hoja 2 de Problemas). No obstante, bajo ciertas condiciones relacionadas con ecuaciones diferenciales, el teorema se convierte en caracterización.

$\boxed{\textbf{Método } 5}$ ¿Cómo obtener una base a partir de un sistema generador?

Sea $\mathscr{W}$ un s.v. no nulo de $\mathscr{V}$ (eventualmente, $\mathscr{W}$ podría ser $\mathscr{V}$) y $\{v_1, \ldots, v_m\} \subset \mathscr{W}$ un sistema generador de $\mathscr{W}$. Se quiere obtener una base de $\mathscr{W}$.

1. Sean $\mathscr{B}, M, T$ con en los pasos 1,2,3 del Método 3.
   - Opción-1: una base de $\mathscr{W}$ está formada por los vectores de $\mathscr{B}$ que han generado las filas no nulas de T.
   - Opción-2: las filas no nulas de T son las coordendas, en $\mathscr{B}$, de los vectores de una base de $\mathscr{W}$. Por tanto, basta aplicar el Método 2 a cada fila no nula de T, junto a $\mathscr{B}$, para obtener una base de $\mathscr{W}$.

   Observación. Desde el punto de vista computacional, resulta mas aconsejable la opción-2.

$\boxed{\textbf{Método } 6}$ Manipulación de Subespacios Vectoriales

Sea $\mathscr{W}$ un subespacio vectorial de $\mathscr{V}$ (se recuerda que $\dim(\mathscr{V}) = n$) y $\mathscr{B}$ una base de $\mathscr{V}$; en la práctica, se toma $\mathscr{B}$ como la base canónica.

Se conoce un sistema generador $\{w_1, \ldots, w_m\}$ de $\mathscr{W}$	$\xrightarrow{\text{Método 5}}$ $\xleftarrow{\text{Trivial}}$	Se conoce una base $\{v_1, \ldots, v_r\}$ de $\mathscr{W}$	$\xrightarrow{\text{Véase } \boxed{A_1}}$ $\xleftarrow{\text{Véase } \boxed{A_2}}$	Ecuaciones Paramétricas de $\mathscr{W}$: $\begin{cases} x_1 = a_{1,1}\lambda_1 + \cdots + a_{1,r}\lambda_r \\ \quad \vdots \\ x_n = a_{n,1}\lambda_1 + \cdots + a_{n,r}\lambda_r \end{cases}$	$\xrightarrow{\text{Véase } \boxed{A_3}}$ $\xleftarrow{\text{Véase } \boxed{A_4}}$	Ecuaciones Implícitas de $\mathscr{W}$: $\begin{cases} b_{1,1}x_1 + \cdots + b_{1,n}x_n = 0 \\ \quad \vdots \\ b_{n-r,1}x_1 + \cdots + b_{n-r,n}x_n = 0 \end{cases}$	$\circlearrowleft$
$\downarrow$ $\dim(\mathscr{W}) \leq m$		$\downarrow$ $\dim(\mathscr{W}) = r$		$\downarrow$ $\dim(\mathscr{W}) = \#(\text{parámetros})$		$\downarrow$ $\dim(\mathscr{W}) = n - \#(\text{ecuaciones})$	

$\boxed{A_1}$ Basta tener en cuenta que los coeficientes de λ_i en las ecuaciones paramétricas son las coordenadas en $\mathscr{B}$ de v_i. Así

$$\begin{aligned} v_1 &\xrightarrow{\text{Método-1}} (a_{1,1}, \ldots, a_{n,1}) = \text{coordenadas de } v_1 \text{ en } \mathscr{B} = \text{coeficientes de } \lambda_1 \\ &\vdots \\ v_r &\xrightarrow{\text{Método-1}} (a_{1,r}, \ldots, a_{n,r}) = \text{coordenadas de } v_r \text{ en } \mathscr{B} = \text{coeficientes de } \lambda_r \end{aligned}$$

$\boxed{A_2}$ Utilizar que los coeficientes de λ_i en las ecuaciones paramétricas son las coordenadas en $\mathscr{B}$ de u_i y aplicar el Método 2.

$\boxed{A_3}$ Se considera la matriz T que se obtiene al triangular la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,r} & a_{2,r} & \cdots & a_{n,r} \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}.$$

La última fila de T debe tener $n - r$ elementos no nulos. Igualándolos a 0 se obtienen las ecuaciones implícitas.

$\boxed{A_4}$ Basta resolver el sistema homegéneo de las ecuaciones implícitas.

$\boxed{\circlearrowleft}$ Si el dato de entrada es una colección de ecuaciones implícitas, conviene averiguar si hay ecuaciones redundantes; linealmente dependientes del resto. Para ello, basta triangular la matriz del sistema y trabajar con el sistema asociado a la matriz triangulada.

Observación.

- Si $\mathscr{W}$ es el espacio nulo: no hay base, no hay ecuaciones paramétricas y las ecuaciones implícitas son $x_1 = \cdots = x_n = 0$
- Si $\mathscr{W} = \mathscr{V}$: una base de $\mathscr{W}$ es $\mathscr{B}$, las ecuaciones paramétricas son $x_1 = \lambda_1, x_2 = \lambda_2, \ldots, x_n = \lambda_n$ y no hay ecuaciones implícitas.

$\boxed{\textbf{Método } 7}$ ¿Cómo manipular $\mathscr{W}_1 + \mathscr{W}_2$?

La idea consiste en utilizar que

$$\mathscr{W}_1 + \mathscr{W}_2 = L(\mathscr{W}_1 \cup \mathscr{W}_2).$$

Juntando una base de $\mathscr{W}_1$ con una base de $\mathscr{W}_2$ se obtiene un sistema generador de $\mathscr{W}_1 + \mathscr{W}_2$ y, por tanto, se puede entrar en el diagrama del Método 6 por la celda de la izquierda.

$\boxed{\textbf{Método } 8}$ ¿Cómo manipular $\mathscr{W}_1 \cap \mathscr{W}_2$?

Juntando las ecuaciones implíctas de $\mathscr{W}_1$ con las de $\mathscr{W}_2$ se obtiene una colección de ecuaciones que define $\mathscr{W}_1 \cap \mathscr{W}_2$. Por tanto, aplicando el proceso $\circlearrowleft$, descrito en el Método 6, se consiguen las ecuaciones implicitas de $\mathscr{W}_1 \cap \mathscr{W}_2$.

$\boxed{\textbf{Método } 9}$ Cambio de Base

En el espacio vectorial $\mathscr{V}$ se consideran las bases $\mathscr{B}_1 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ y $\mathscr{B}_2 = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Sea u un vector arbitrario de $\mathscr{V}$. Sea consideran las coordenadas de u en ambas bases. Sean

- $(x_1, \ldots, x_n)$ las coordenadas de u en $\mathscr{B}_1$ e
- $(y_1, \ldots, y_n)$ las coordenadas de u en $\mathscr{B}_2$.

Se trata de expresar las coordenadas $(y_1, \ldots, y_n)$ en función de las coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$. De la definición de coordenadas se tiene que

$$u = x_1u_1 + \cdots + x_nu_n, \;\; u = y_1v_1 + \cdots + y_nv_n.$$

Por tanto

$$x_1u_1 + \cdots + x_nu_n = y_1v_1 + \cdots + y_nv_n.$$

Por otra parte, como $u_i \in \mathscr{V}$, consideramos las coordenadas de u_i en la base $\mathscr{B}_2$; digamos que son $(a_{i1}, \ldots, a_{in})$. De nuevo utilizando la definición de coordenadas, se obtiene que:

$$\begin{aligned} y_1v_1 + \cdots + y_nv_n &= x_1u_1 + \cdots + x_nu_n \\ &= x_1(a_{1,1}v_1 + \cdots + a_{1,n}v_n) + \cdots + x_n(a_{n,1}v_1 + \cdots + a_{n,n}v_n) \\ &= (a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{n,1}x_n)v_1 + \cdots + (a_{1,n}x_1 + \cdots + a_{n,n}x_n)v_n. \end{aligned}$$

En esta situación, utilizando que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ son l.i. se concluye que

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{n,1}x_n \\ \qquad \vdots \\ y_n = a_{1,n}x_1 + \cdots + a_{n,n}x_n \end{array} \right.$$

que se denominan <u>Ecuaciones del cambio de base</u> de $\mathscr{B}_1$ a $\mathscr{B}_2$. O bien:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,n} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{A esta matriz se le llama} \\ \text{Matriz del Cambio de Base} \\ \text{de } \mathscr{B}_1 \text{ a } \mathscr{B}_2 \\ \text{y se representa como} \\ \boxed{\mathscr{M}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)}.}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X}$$

Abreviadamente, se escribe

$$Y = \mathscr{M}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2) \cdot X$$

Observación.

1. $\mathscr{M}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ es cuadrada de orden $n \times n$.

2. La columna i-ésima de $\mathscr{M}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ son las coordenadas de u_i en $\mathscr{B}_2$.

3. Teniendo en cuenta el Método 1, así como la observación anterior, se deduce que $\mathscr{M}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ es invertible.

4. $\mathscr{M}(\mathscr{B}_2, \mathscr{B}_1) = \mathscr{M}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)^{-1}$

5. <u>Proceso para el cálculo de $\mathscr{M}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$.</u>

   Se calculan las coordenadas de u_1 en la base $\mathscr{B}_2$ (aplíquese el Método 1) y se colocan en la primera columna de la matriz. Repitiendo en proceso para $u_2, \ldots, u_n$ se completa la matriz.

6. <u>Como se utiliza $\mathscr{M}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$.</u>

   Sea $u \in \mathscr{V}$. La matriz $\mathscr{M}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ actúa como un diccionario, traduciendo las coordenadas de u en $\mathscr{B}_1$ en las coordenadas de u en $\mathscr{B}_2$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Coord.}\\ \text{de } u\\ \text{en } \mathscr{B}_2\end{array}} = \boxed{\mathscr{M}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)} \cdot \boxed{\begin{array}{c}\text{Coord.}\\ \text{de } u\\ \text{en } \mathscr{B}_1\end{array}}$$